

# Mécanique du point

---

## CHAPITRE 5

# Moment cinétique et solide en rotation

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

# Introduction (1)

---

La mécanique classique (ou Newtonienne) introduit des notions premières comme la masse, l'accélération, les forces. Ces notions sont suffisantes pour étudier des problèmes qui ne nécessitent que la mécanique classique. Cependant, comme on l'a vu, de nouveaux concepts ont été introduits au cours de l'élaboration de la théorie, en particulier l'énergie mécanique, à cause du **caractère conservatif** de ces grandeurs (c'est-à-dire que ces grandeurs gardent une valeur constante au cours de l'évolution du système physique au cours du temps).

# Introduction (2)

---

Les trois grandeurs physiques conservatives suivantes jouent un rôle central en mécanique :

→  $\vec{p}$  = **quantité de mouvement** ( $= m\vec{v}$  en mécanique classique), grandeur vectorielle.

→  $E$  = **l'énergie**, grandeur scalaire.

→  $\vec{L}$  = **le moment cinétique** (défini dans ce chapitre), grandeur vectorielle.

La validité des principes de conservation de  $\vec{p}$ ,  $E$ ,  $\vec{L}$  s'étend à toute la physique ce qui fait que l'on retrouve ces grandeurs aussi bien en physique quantique, qu'en relativité etc...

# Introduction (3)

---

Le **théorème de Noether** (mathématicienne allemande 1882-1935) permet de relier la conservation de  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$ ,  $E$  aux invariances des lois de la physique :

→ La conservation de  $\vec{p}$  est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation spatiale, c'est-à-dire de l'homogénéité de l'espace.

→ La conservation de  $\vec{L}$  est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par rotation, c'est-à-dire de l'isotropie de l'espace.

→ La conservation de  $E$  est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation temporelle, c'est-à-dire de l'homogénéité du temps.

# Introduction (4)

---

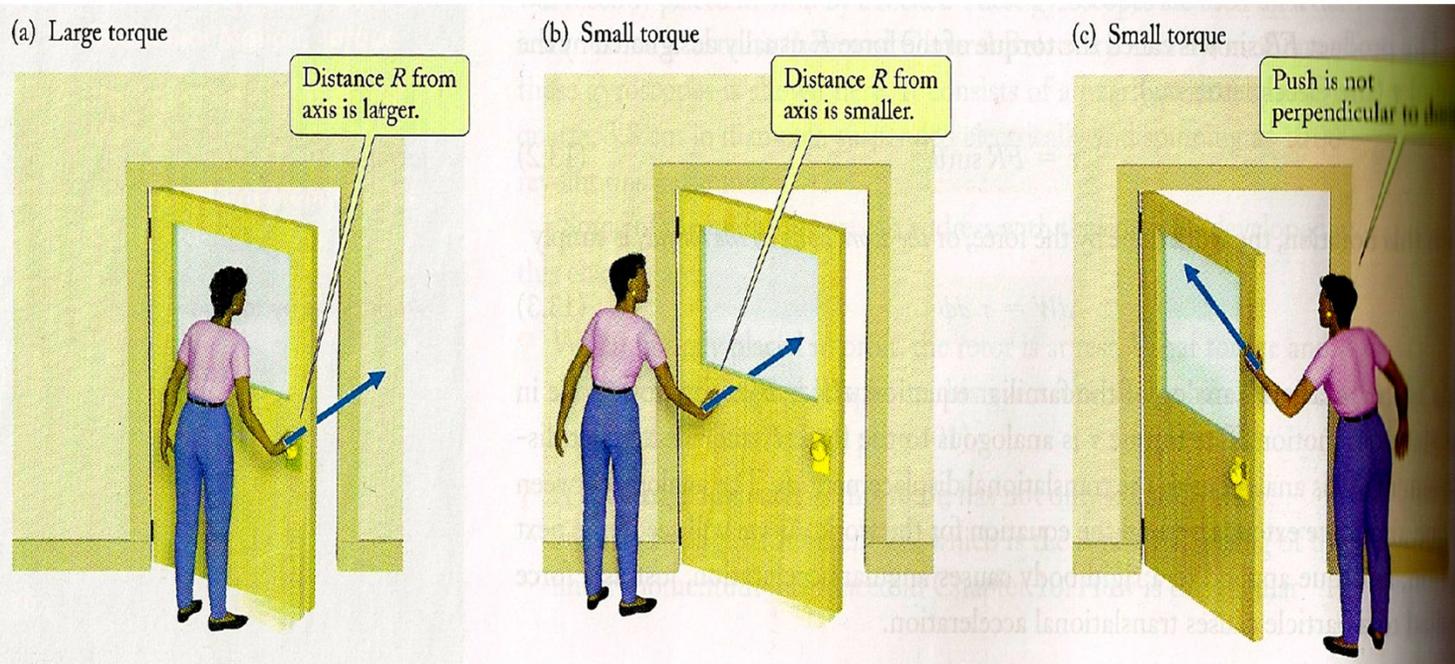
- **L'invariance par translation dans le temps**: il s'agit du fait que les lois de la physique persistent dans le temps, passé ou futur, que la marche des phénomènes physique, à des instants différents de leur observation (dans les mêmes conditions), est la même. On parle de "l'homogénéité du temps".
  - **L'invariance par translation dans l'espace**: il s'agit du fait que les lois de la physique sont les mêmes, pour deux référentiels issus l'un de l'autre par une translation (à Abidjan et à Yamoussoukro) par exemple. On parle alors de "l'homogénéité de l'espace".
  - **L'invariance par changement d'orientation** ; autrement dit : il n'y a pas, dans l'espace, de direction absolue. On parle de "l'isotropie de l'espace".
-

---

# Moment d'une force

# Définitions

Le moment d'une force (torque en anglais), par rapport à un point ou un axe, donne une mesure de la tendance qu'à une force à provoquer la rotation d'un corps par rapport à un point ou un axe (cf. figure ci-dessous).



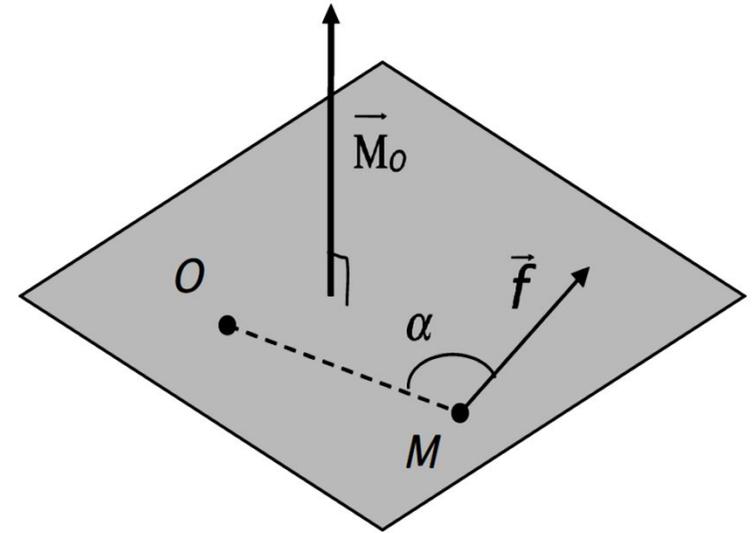
**FIGURE 13.2** (a) A push against the door far from the hinge produces a large angular acceleration. (b) The same push near the hinge produces a small angular acceleration. (c) A push against the door at a small angle also produces a small angular acceleration.

# Moment en un point (1)

On considère une force  $\vec{f}$  qui s'applique en un point  $M$ .

Par définition  $\vec{M}_O(\vec{f})$  est le **moment de la force par rapport au point O** quelconque mais **fixe dans le référentiel d'étude**.

Il est d'usage de nommer le point par la lettre O mais ce n'est pas forcément l'origine du repère, vous pouvez donner le nom que vous souhaitez à ce point.



$$\vec{M}_O \equiv \vec{OM} \wedge \vec{f} \quad (\text{définition})$$

# Moment en un point (2)

Il s'exprime en N.m et il s'agit d'une grandeur vectorielle. Il est perpendiculaire au plan contenant  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{f}$  par définition du produit vectoriel. Les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{f}$ , et  $\vec{M}_O$  forment **un trièdre direct** (règle du tire bouchon ou de la main droite). La norme de ce moment vaut

**$M_O = OM \times f \times \sin \alpha$** . Si O appartient à la droite  $(M, \vec{f})$ , alors

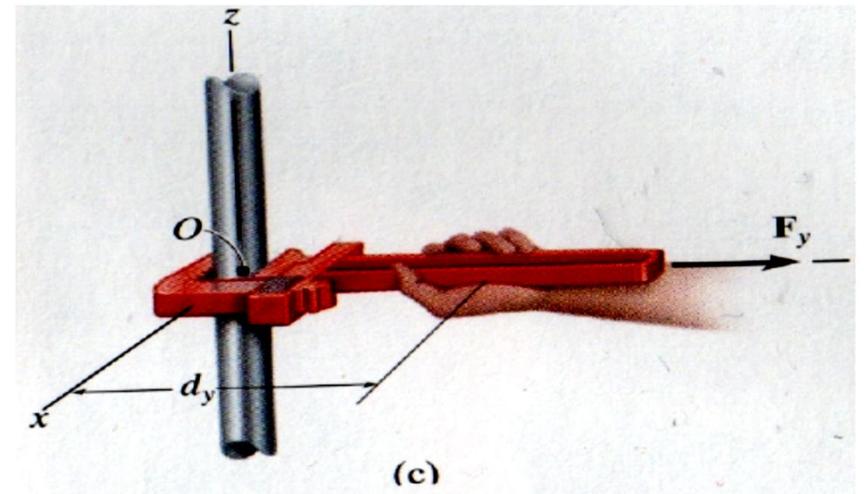
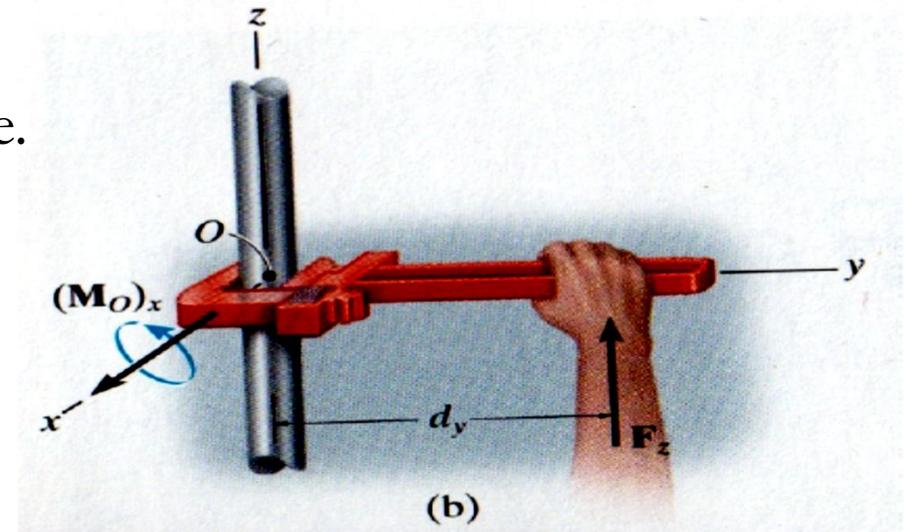
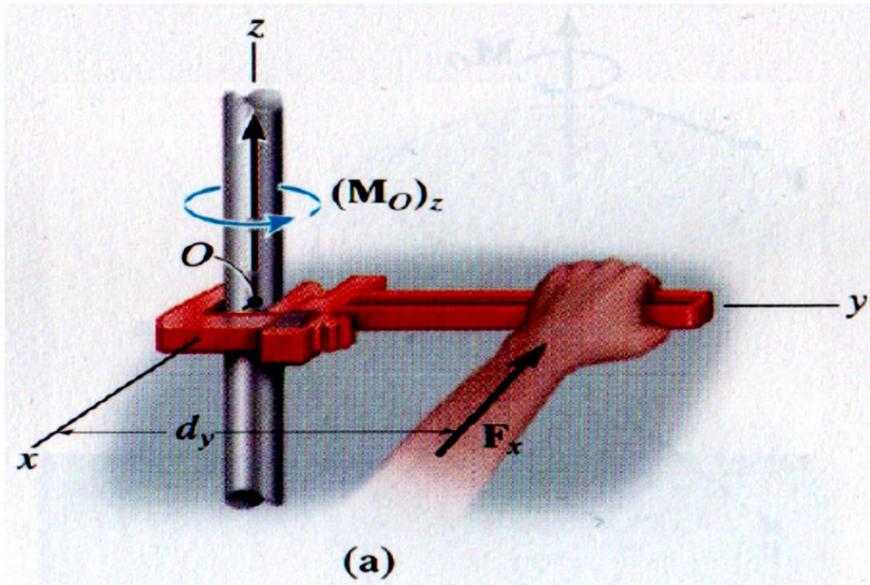
**$\vec{M}_O = \vec{0}$** . Le moment des forces par rapport à un point est une grandeur additive : si on considère deux forces  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  qui s'appliquent sur  $M$  :

$$\vec{M}_O (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_1 + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_2 = \vec{M}_O (\vec{f}_1) + \vec{M}_O (\vec{f}_2)$$

**Le moment de la somme des forces est la somme des moments de chaque force.**

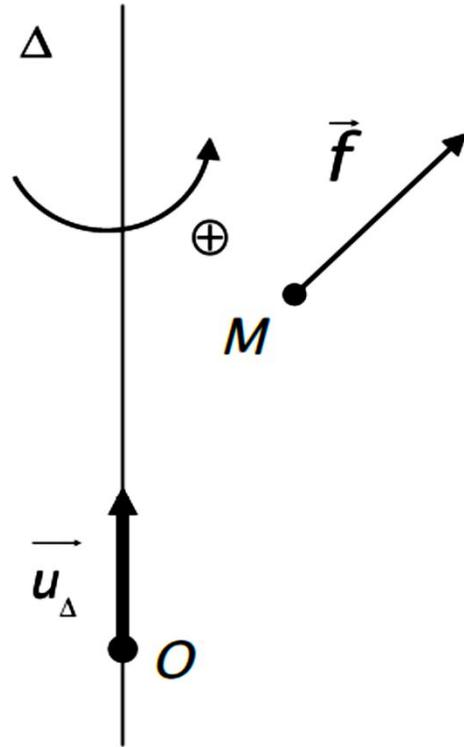
# Moment en un point (3)

Figure a,b,c : Effet d'un moment d'une force.



# Moment par rapport à un axe (1)

## □ Cas général



$\Delta$  est orienté suivant  $\vec{u}_\Delta$   
(règle du tir bouchon)

$$M_\Delta \equiv \vec{M}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

Le moment de la force  $\vec{f}$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$  est la projection orthogonale de  $\vec{M}_O(\vec{f})$  sur l'axe  $\Delta$  :

$$M_\Delta(\vec{f}) = \vec{M}_O(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

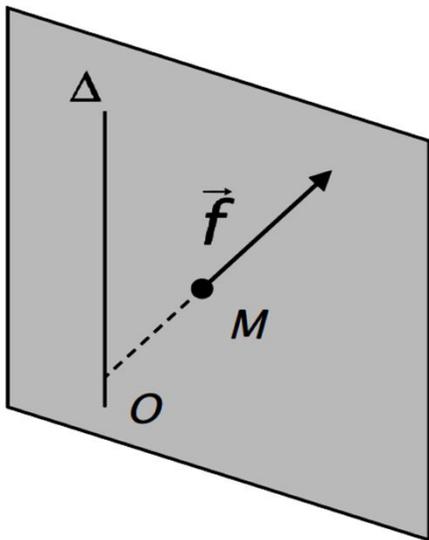
Il s'exprime en  $\text{N} \cdot \text{m}^2$  et il s'agit d'une grandeur scalaire.

$$\forall O \in \Delta, M_\Delta \text{ est identique}$$

# Moment par rapport à un axe (2)

$$\begin{aligned} M_{\Delta} &= \vec{M}_O \cdot \vec{u}_{\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_{\Delta} = ((\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_{\Delta} \\ &= \underbrace{(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_{\Delta}}_{=0} + \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}_{\Delta} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}_{\Delta} \end{aligned}$$

## □ Force passant l'axe



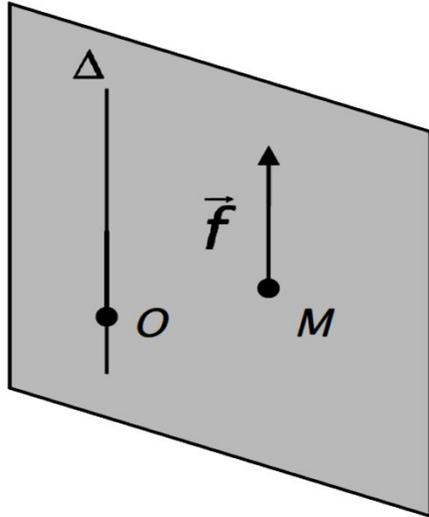
la droite  $(M, \vec{f})$  coupe l'axe  $\Delta$  en un point  $O$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

donc  **$M_{\Delta} = 0$** . Ceci est vrai pour tout point  $O$  appartenant à  $\Delta$ .

# Moment par rapport à un axe (3)

## □ Force parallèle à l'axe



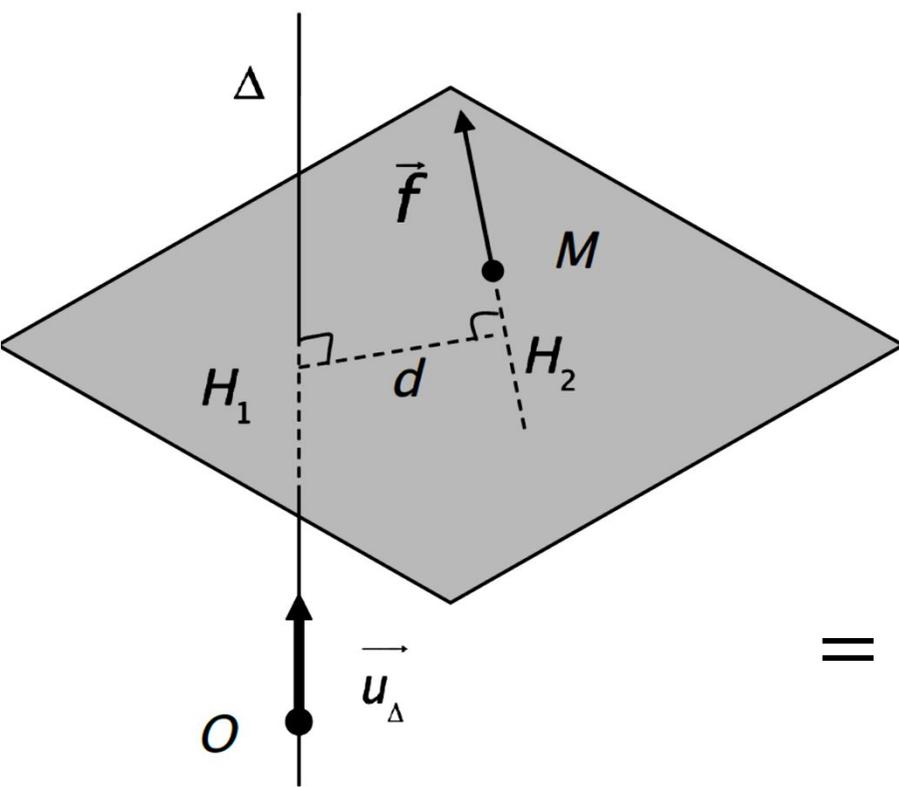
$\vec{M}_O \perp \overrightarrow{OM}$  et  $\vec{f}$ , comme  $\vec{f} \parallel \Delta$  alors  
 $\vec{M}_O \perp \Delta$  ainsi:

$$M_{\Delta} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0$$

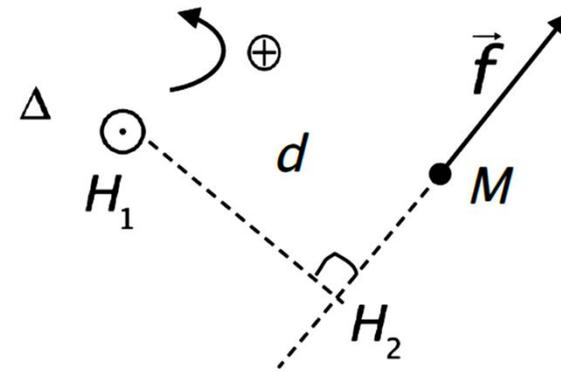
$$M_{\Delta}(\vec{f}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{f} \parallel \vec{u}_{\Delta} \\ \text{ou} \\ \text{la droite d'action de } \vec{f} \text{ coupe } \Delta \end{cases}$$

# Moment par rapport à un axe (4)

□ Force perpendiculaire à l'axe, notion de bras de levier



Vue de dessus



$$\begin{aligned} M_{\Delta} &= \left( \overrightarrow{H_1 M} \wedge \vec{f} \right) \cdot \vec{u}_{\Delta} \\ &= \left( \left( \overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 M} \right) \wedge \vec{f} \right) \cdot \vec{u}_{\Delta} \\ &= \left( \overrightarrow{H_1 H_2} \wedge \vec{f} \right) \cdot \vec{u}_{\Delta} = d \times f \end{aligned}$$

# Moment par rapport à un axe (5)

On appelle bras de levier la distance séparant l'axe  $\Delta$  de la droite  $(M, \vec{f})$  de la force  $\vec{f}$ . La valeur absolue  $|M_{\Delta}(\vec{f})|$  du moment de  $\vec{f}$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est :

$$|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})| = \text{norme de la force} \times \text{bras de levier}$$

$$M_{\Delta} = f d \text{ avec } H_1 H_2 = d = \text{le bras de levier.}$$

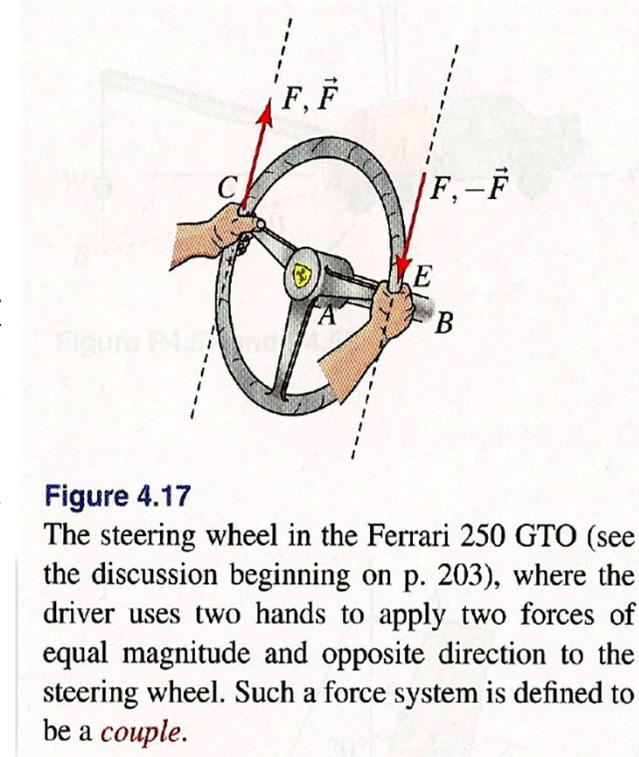
$M_{\Delta} > 0$  si  $M_{\Delta}$  fait tourner  $M$  autour de  $\Delta$  dans le sens positif (règle du tire bouchon).

$M_{\Delta} < 0$  si  $M_{\Delta}$  fait tourner  $M$  autour de  $\Delta$  dans le sens négatif.

# Notion de couple

Le conducteur de la Ferrari de la figure ci-contre exerce sur le volant de la voiture deux forces telles que  $\vec{F}_C + \vec{F}_E = 0$  car  $\vec{F}_C = -\vec{F}_E$ . Cependant, le volant va tourner car le moment global de ces deux forces par rapport à l'axe de rotation du volant n'est pas nul :  $M_\Delta = 2rF$  où  $r$  est le rayon du volant.

On appelle **COUPLE** une action exercée sur un système telle que la force résultante soit nulle mais dont le moment résultant n'est pas nul.



---

# Moment cinétique d'un point matériel

---

# Moment cinétique par rapport à un point fixe (1)

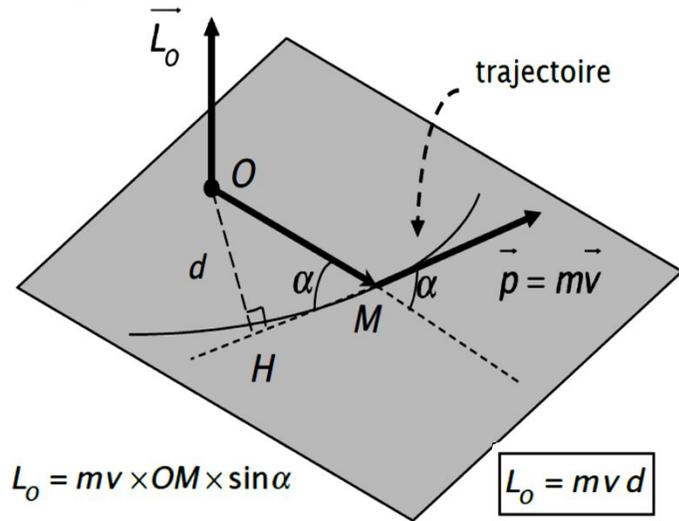
On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ . On note  $\vec{p} = m\vec{v}$  sa quantité de mouvement. On considère également un axe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$  déterminé par un point  $O$  et un vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  dont le sens précise l'orientation de l'axe.

Le moment cinétique du point  $M$  par rapport à un point fixe  $O$  est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Sa norme se mesure en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = \text{J} \cdot \text{s}$ . Le moment cinétique par rapport à un point  $O$  est défini à partir de la vitesse de  $M$ , **il dépend donc du référentiel dans lequel on le détermine.**

# Moment cinétique par rapport à un point fixe (2)



De par sa définition à partir d'un produit vectoriel,  $\vec{L}_O$  est  $\perp$  aux vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$ . En conséquence :

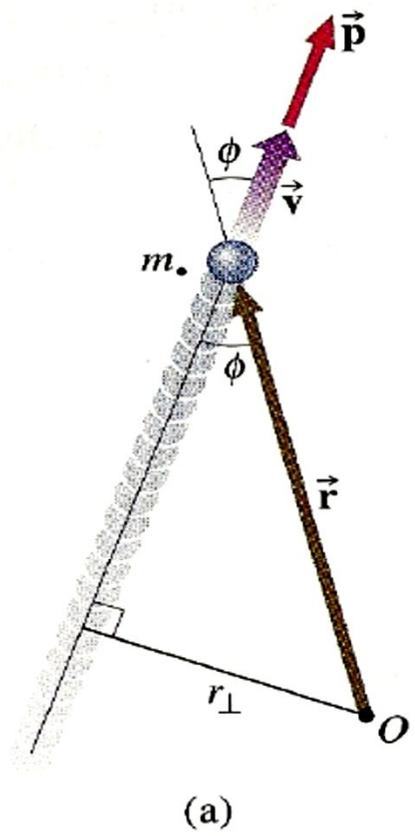
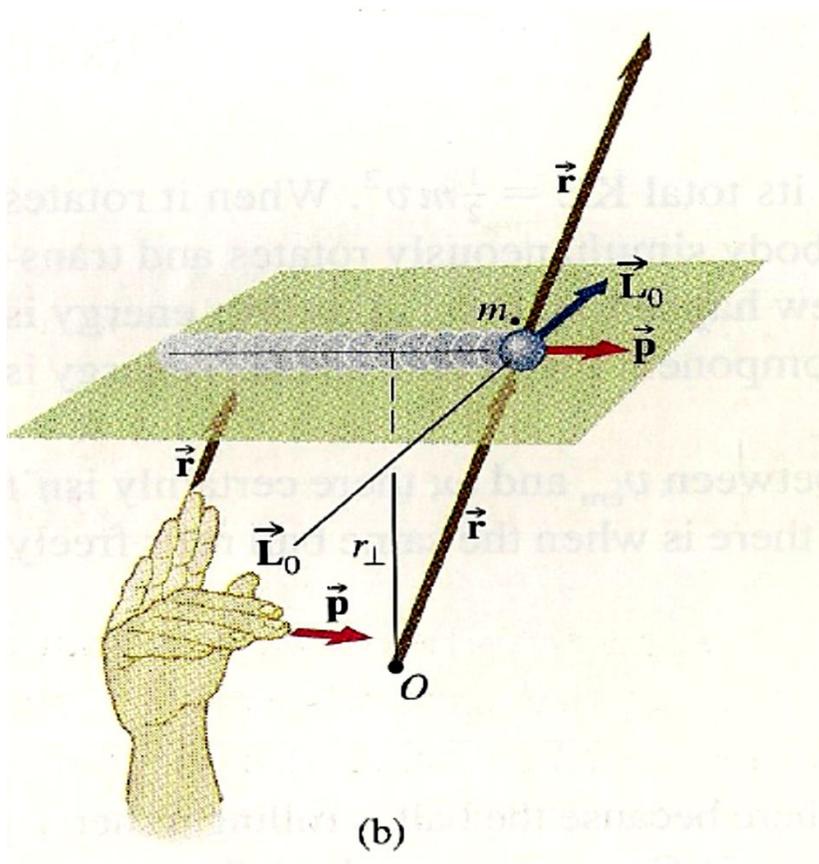
- si le mouvement de  $M$  est plan et que  $O$  appartient au plan du mouvement, **le vecteur  $\vec{L}_O$  est perpendiculaire à ce plan à tout instant**. Sa direction est donc fixe et perpendiculaire au plan du mouvement. La réciproque est vraie.

- **si le mouvement de  $M$  est rectiligne et inscrit sur une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$ ,  $\vec{L}_O$  est nul à tout instant** puisque les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires à tout instant. La réciproque est vraie.

- **Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule** et que l'on indique en indice. En effet,

$$\vec{L}_B = \vec{BM} \wedge \vec{p} = (\vec{BO} + \vec{OM}) \wedge \vec{p} = \vec{BO} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{L}_O + \vec{BO} \wedge \vec{p}$$

# Moment cinétique par rapport à un point fixe (3)



**Figure 8.45** (a) A particle of mass  $m$ , has an angular momentum  $L_0$  with respect to point  $O$  equal to  $r_{\perp} m v$ . (b) The direction of  $\vec{L}_0$  is perpendicular to the plane of  $\vec{r}$  and  $\vec{p}$  such that  $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$ . Slide  $\vec{r}$  along itself until it's tail-to-tail with  $\vec{p}$  and then form  $\vec{r} \times \vec{p}$ . Determine the smallest angle between  $\vec{r}$  and  $\vec{p}$  by placing your fingers along  $\vec{r}$  so they close naturally into  $\vec{p}$ . Your thumb will point in the direction of  $\vec{L}_0$ .

# Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$  est la projection orthogonale de  $\vec{L}_O$  sur l'axe  $\Delta$  :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

- le moment cinétique par rapport à un axe dépend du référentiel d'étude et se mesure en J.s.
- il ne dépend pas du choix du point  $O$  appartenant à l'axe  $\Delta$  utilisé pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de  $\Delta$

En effet soit  $O' \in \Delta$ .

$$\vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta - \vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{u}_\Delta \cdot (\vec{L}_O - \vec{L}_{O'})$$
$$= \vec{u}_\Delta \cdot \left( - \underbrace{\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}}_{\perp \text{ à } \overrightarrow{O'O}} \right) = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta$$

**Ce qui prouve que le point de l'axe choisi pour calculer  $L_\Delta$  n'a pas d'importance.**

# Cas où le point matériel est en mouvement circulaire (1)

Lorsque  $M$  est en mouvement circulaire sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , on a intérêt à le repérer en coordonnées cylindriques de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$  perpendiculaire au plan du cercle et d'angle polaire  $\theta$ . On utilise les relations établies dans le chapitre cinématique du point :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \text{ et } \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

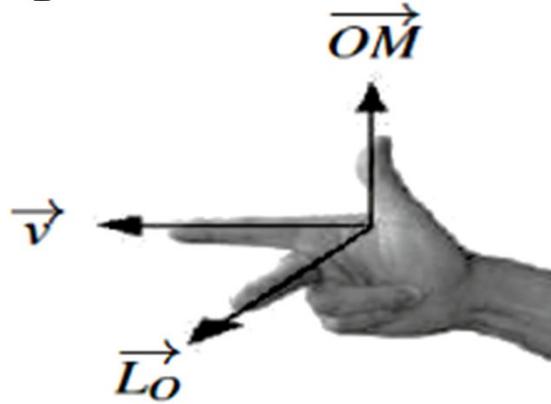
On considère  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  et on calcule  $\vec{L}_O$  et  $L_\Delta = L_{(Oz)}$  :

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(R\vec{u}_r) \wedge (R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$L_{(Oz)}(M) = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = mR^2\dot{\theta}$$

## Cas où le point matériel est en mouvement circulaire (2)

On peut trouver la direction de  $\vec{L}_O$  à l'aide de la règle de la main droite représentée sur la figure suivante :



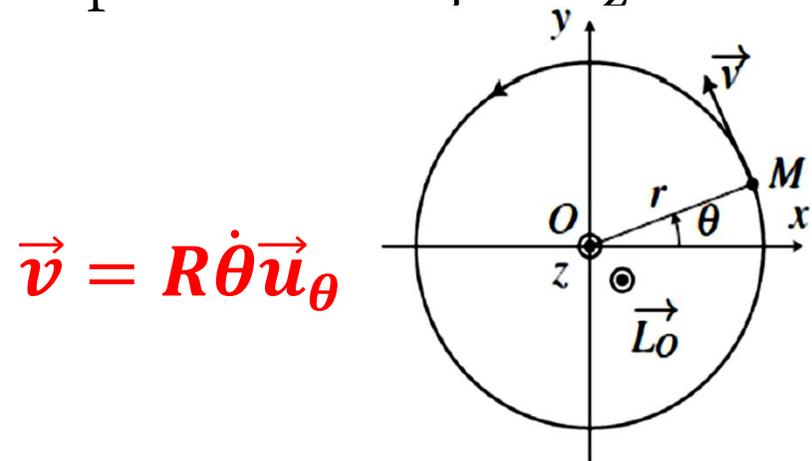
Ainsi :

- lorsque la révolution du point  $M$  se fait dans le sens direct autour de  $\vec{u}_z$ ,  $\dot{\theta} > 0$  et  $\vec{L}_O$  est selon  $+\vec{u}_z$  ;
- lorsque la révolution du point  $M$  se fait dans le sens indirect autour de  $\vec{u}_z$ ,  $\dot{\theta} < 0$  et  $\vec{L}_O$  est selon  $-\vec{u}_z$  ;

## Cas où le point matériel est en mouvement circulaire (3)

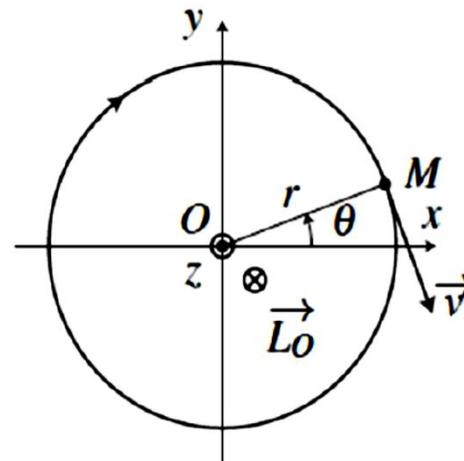
Le signe de  $L_{(Oz)}(M)$  permet donc de déterminer le sens de la révolution circulaire de  $M$  :

- si  $L_{(Oz)}(M) > 0$ , la révolution se fait dans le sens direct dans le plan orienté par  $\vec{u}_z$ ;
- si  $L_{(Oz)}(M) < 0$ , la révolution se fait dans le sens indirect dans le plan orienté par  $\vec{u}_z$



$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

**Sens direct**



$$\vec{v} = -R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

**Sens indirect**

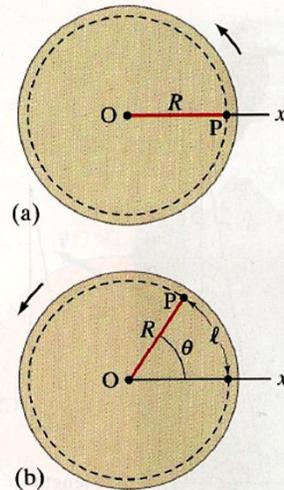
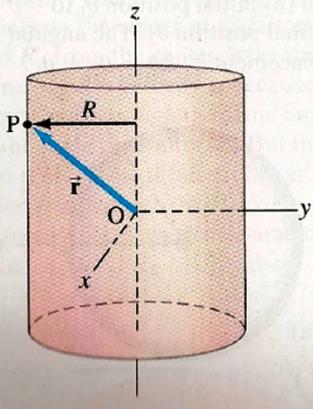
---

# Moment cinétique d'un solide en rotation

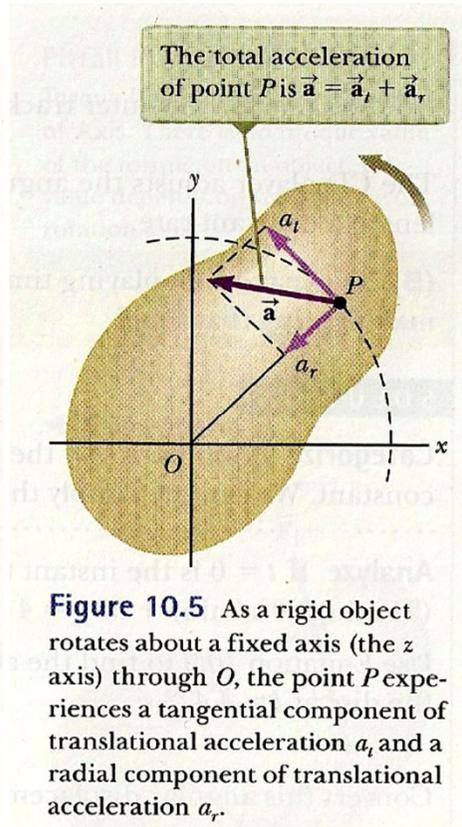
# Variables cinématiques et vecteur en rotation (1)

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe (cf. figure suivantes).

**FIGURE 10-2** Showing the distinction between  $\vec{r}$  (the position vector) and  $R$  (the distance from the rotation axis) for a point  $P$  on the edge of a cylinder rotating about the  $z$  axis.



**FIGURE 10-1** Looking at a wheel that is rotating counterclockwise about an axis through the wheel's center at  $O$  (axis perpendicular to the page). Each point, such as point  $P$ , moves in a circular path;  $\ell$  is the distance  $P$  travels as the wheel rotates through the angle  $\theta$ .



**Figure 10.5** As a rigid object rotates about a fixed axis (the  $z$  axis) through  $O$ , the point  $P$  experiences a tangential component of translational acceleration  $a_t$  and a radial component of translational acceleration  $a_r$ .

$$\text{angle de rotation: } \theta \equiv \frac{\ell}{R}$$

$$\text{vitesse angulaire: } \omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{accélération angulaire: } \alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

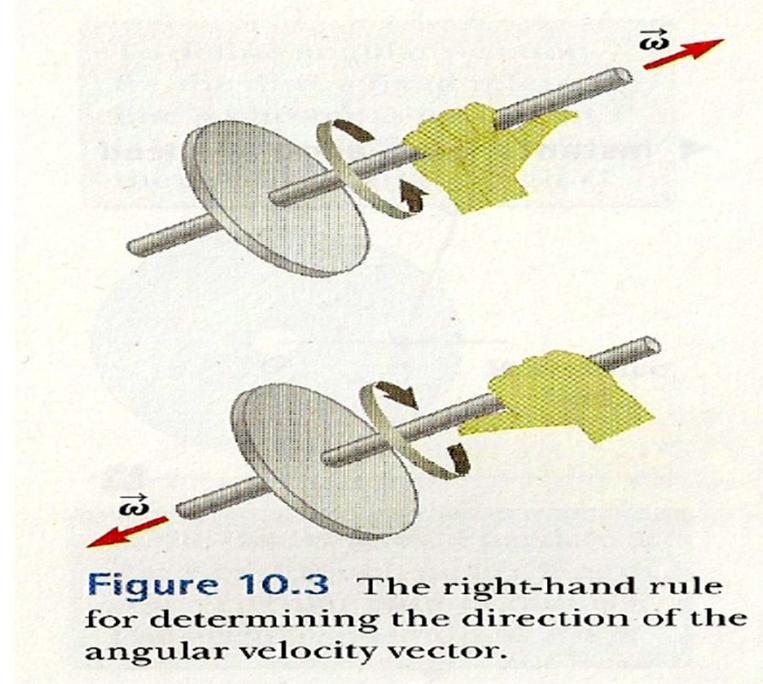
$$\text{vitesse linéaire: } v \equiv R\omega$$

$$\text{accélération linéaire tangentielle: } a_t = R\alpha$$

$$\text{accélération linéaire radiale: } a_r = R\omega^2 = v^2/R$$

# Variables cinématiques et vecteur en rotation (2)

On définit **le vecteur rotation**  $\vec{\omega}$  qui a pour norme la vitesse angulaire  $\omega$ , qui est porté par l'axe de rotation et qui est orienté selon la règle de la main droite ( ou règle du tire-bouchon ) comme indiqué sur la figure suivante.



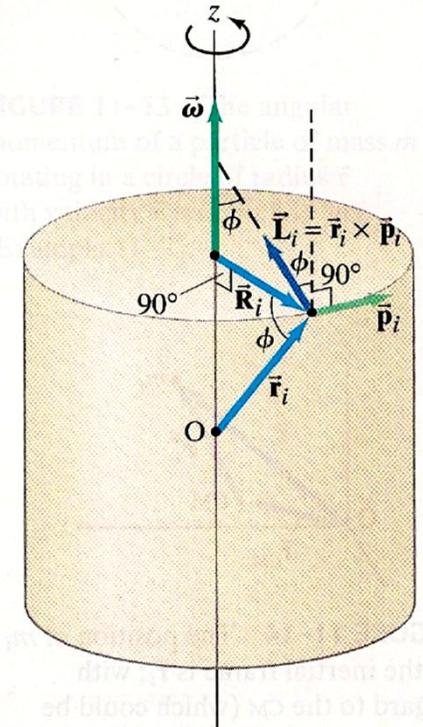
# Moment cinétique et moment d'inertie (1)

On considère le solide de la figure ci-contre en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  que l'on choisit comme l'axe  $(Oz)$ . Pour chaque particule de l'objet situé en  $\vec{r}_i$ :  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$ . L'angle entre  $\vec{r}_i$  et  $\vec{p}_i$  vaut  $90^\circ$ . On note  $\phi$  l'angle entre  $\vec{L}_i$  et l'axe de rotation. Ainsi la projection de  $\vec{L}_i$  sur  $(Oz)$  vaut quelque soit le point  $O \in \Delta$  à l'axe:

$$L_{iz} = r_i \times p_i \times \cos \phi = r_i \times m_i v_i \cos \phi$$

De plus comme  $v_i = R\omega_i$  et  $R_i = r_i \cos \phi =$  la distance à l'axe de rotation, on obtient:

$$L_{iz} = (m_i R_i^2) \omega$$



**FIGURE 11-15**

Calculating  $L_\omega = L_z = \Sigma L_{iz}$ . Note that  $\vec{L}_i$  is perpendicular to  $\vec{r}_i$ , and  $\vec{R}_i$  is perpendicular to the  $z$  axis, so the three angles marked  $\phi$  are equal.

# Moment cinétique et moment d'inertie (2)

Le solide est la somme de toutes les particules qui le constituent, cela donne pour l'ensemble du solide :

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = J\omega \Rightarrow \boxed{L_z = J\omega}$$

où l'on a introduit **le moment d'inertie du solide en rotation par rapport à l'axe fixe**:

$$\boxed{J = \sum_i m_i R_i^2}$$

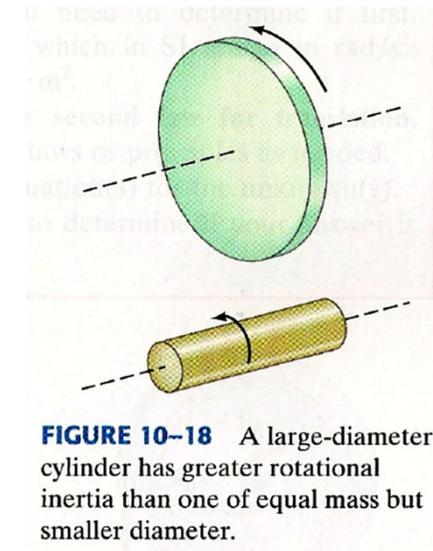
Le moment d'inertie d'un solide en rotation **caractérise la distribution de masse de ce solide par rapport à l'axe de rotation en question**. Il n'est donc pas unique pour un même solide suivant l'axe de rotation d'étude.

# Moment cinétique et moment d'inertie (3)

Plus  $J$  sera important, plus l'inertie (l'opposition, la résistance au changement) vis-à-vis de la rotation sera importante.

$J$  joue le même rôle dans les mouvements de rotation que la masse dans les mouvements de translation.

$J$  n'est pas facile à calculer dans le cas général (**vous n'avez pas à le faire dans le cadre du programme**), cela est beaucoup plus facile si l'axe de rotation est un axe de symétrie de l'objet. La figure ci-après donne des valeurs de moments d'inertie dans les cas usuels.



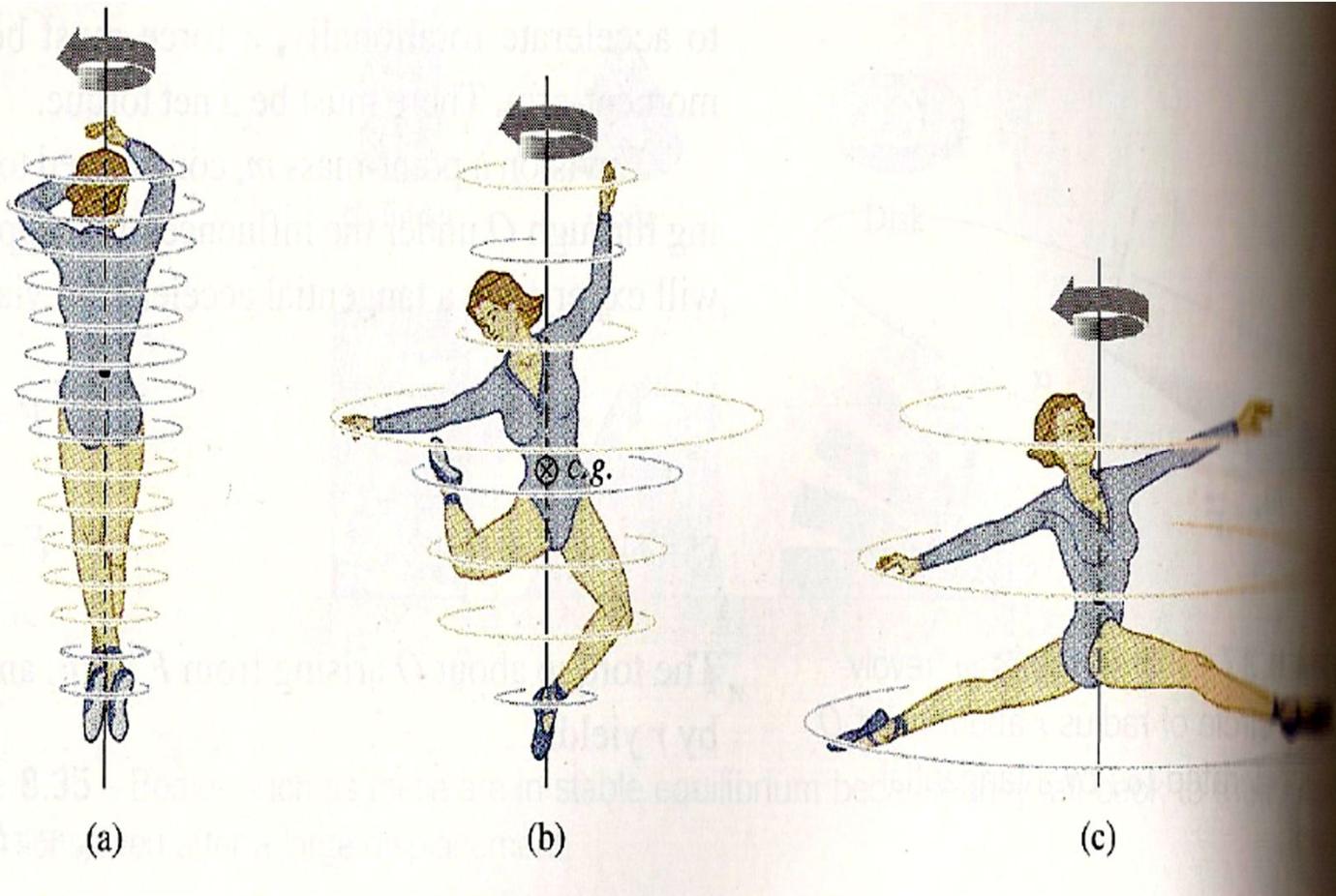
# Moment cinétique et moment d'inertie (4)

Object	Location of axis	Moment of inertia
(a) <b>Thin hoop,</b> radius $R_0$	Through center	$MR_0^2$
(b) <b>Thin hoop,</b> radius $R_0$ width $w$	Through central diameter	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c) <b>Solid cylinder,</b> radius $R_0$	Through center	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d) <b>Hollow cylinder,</b> inner radius $R_1$ outer radius $R_2$	Through center	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

(e) <b>Uniform sphere,</b> radius $r_0$	Through center	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f) <b>Long uniform rod,</b> length $\ell$	Through center	$\frac{1}{12}M\ell^2$
(g) <b>Long uniform rod,</b> length $\ell$	Through end	$\frac{1}{3}M\ell^2$
(h) <b>Rectangular thin plate,</b> length $\ell$ , width $w$	Through center	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

**FIGURE 10-20** Moments of inertia for various objects of uniform composition. [We use  $R$  for radial distance from an axis, and  $r$  for distance from a point (only in e, the sphere), as discussed in Fig. 10-2.]

# Moment cinétique et moment d'inertie (5)



**Figure 8.38** With the limbs drawn in near the spin axis as in (a), the moment-of-inertia is comparatively small. With bent knees  $I$  increases, as in (b), and reaches a maximum with arms and legs extended perpendicular to the axis (c).

# Moment cinétique et moment d'inertie (6)

On peut montrer que si l'axe de rotation est un axe de symétrie qui passe par le centre de masse de l'objet (très souvent le cas pour nous), le moment cinétique  $\vec{L}$  ne possède qu'une composante suivant l'axe de rotation, il est donc colinéaire au vecteur rotation  $\vec{\omega}$  et on obtient :  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ . **Attention dans le cas général,  $\vec{L}$  et  $\vec{\omega}$  ne sont pas colinéaires !** On retiendra donc les résultats suivants :

Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ( $Oz$ )

$$\text{cas général} \Rightarrow L_z = J\omega$$

$$\text{Si axe de symétrie} \Rightarrow \vec{L} = J\vec{\omega}$$

$$J \equiv \sum_i m_i R_i^2 = \text{moment d'inertie (définition)}$$

# Moment cinétique et moment d'inertie (7)

## Exercice d'application

Soient deux points  $M_1$  et  $M_2$  de même masse  $m$  en rotation circulaire et uniforme de centre  $O$  et de rayon  $R$  dans le plan  $(Oxy)$ .

1. Que vaut le moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  de chacun des points ?
2. On envisage maintenant les deux cas suivants : le cas où les points  $M_1$  et  $M_2$  ont la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et le cas où ils ont des vitesses angulaires opposées. Que valent dans chacun des cas  $L_{(Oz)}(M_1)$ ,  $L_{(Oz)}(M_2)$ ,  $L_{(Oz)}$  ? On fera un schéma dans chacun des cas.

# Moment cinétique et moment d'inertie (8)

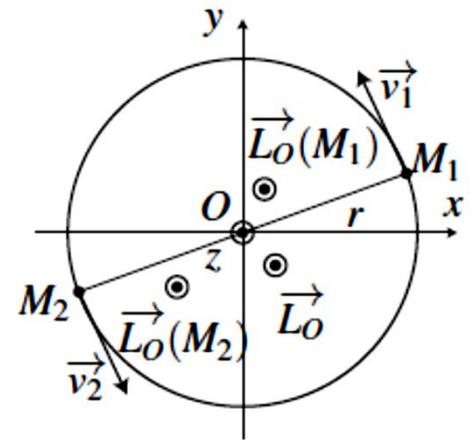
## Correction de l'exercice d'application

1.  $J_{(Oz)} = mR^2$

2. Même vitesse

$$L_{(Oz)}(M_1) = mR^2\dot{\theta} ; L_{(Oz)}(M_2) = mR^2\dot{\theta}$$

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = L_{(Oz)}(M_1) + L_{(Oz)}(M_2) = 2mR^2\dot{\theta}$$

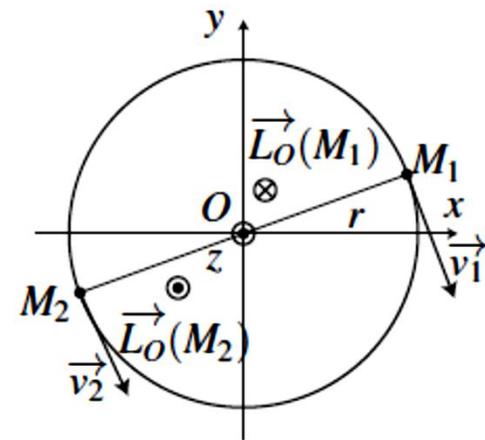


Vitesse opposée

$$L_{(Oz)}(M_1) = mR^2\dot{\theta} ;$$

$$L_{(Oz)}(M_2) = -mR^2\dot{\theta}$$

$$L_{(Oz)} = 0$$



# Liaison pivot

Si un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe, c'est que la plupart du temps, il existe un dispositif mécanique permettant au solide de rester lié à l'axe.

On appelle **liaison pivot** un mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un certain axe.

Cette liaison va exercer sur le solide un couple de frottement dont en général le moment résultant par rapport à l'axe de rotation  $M_{\Delta}$  n'est pas nul.

On dit que la **liaison pivot est parfaite** si  $M_{\Delta} = 0$ .

**On sera souvent dans cette situation.**

---

# Théorème du moment cinétique

---

# Cas d'un point matériel $p/r$ à un point fixe (1)

On étudie le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Le point  $M$  est soumis à un ensemble de forces  $\vec{f}$ . On note  $O$  un point fixe et  $\Delta$  une droite orientée fixe contenant  $O$ . On choisit l'axe  $(Oz)$  de telle sorte que  $\Delta = (Oz)$ . A l'instant  $t$ , on note  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{p} = m\vec{v}$  les vecteurs position, vitesse et quantité de mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . On note également  $\vec{L}_O$  le moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$ ,  $L_{(Oz)}$  son moment cinétique par rapport à  $\Delta = (Oz)$ ,  $\vec{M}_O(\vec{f})$  le moment de la force  $\vec{f}$  par rapport à  $O$  et  $M_{(Oz)}(\vec{f})$  son moment par rapport à  $\Delta = (Oz)$ .

# Cas d'un point matériel p/r à un point fixe (2)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) = m \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{f} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{m \vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0} + \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à point fixe

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{f} = \vec{M}_O \left( \sum \vec{f} \right) = \sum \vec{M}_O \left( \vec{f} \right)$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M, par rapport à un point fixe dans un référentiel galiléen, est égale à la somme des moments, par rapport au même point fixe, auquel il est soumis.

# Cas d'un point matériel $p/r$ à un point fixe (3)

---

## Remarques importantes :

→ Le théorème du moment cinétique, avec le théorème de l'énergie mécanique ou plus généralement la loi de conservation de l'énergie (1er principe de la thermodynamique) et le principe fondamental de la dynamique, est la troisième grande loi de la mécanique. Il s'agit d'une équation vectorielle, il donne donc trois équations scalaires comme le principe fondamental de la dynamique.

→ Le théorème du moment cinétique est très utilisé dans l'étude des systèmes en rotation. **On peut dire que le théorème du moment cinétique est l'équivalent du principe fondamental de la dynamique pour les systèmes en rotation.**

# Cas d'un point matériel p/r à un point fixe (4)

→ Le théorème du moment cinétique est très utile et très riche d'un point de vue conceptuel dans la description des systèmes à forces centrales conservatives (étude dans le prochain chapitre) car dans ce cas, il y a conservation de  $\vec{L}_O$

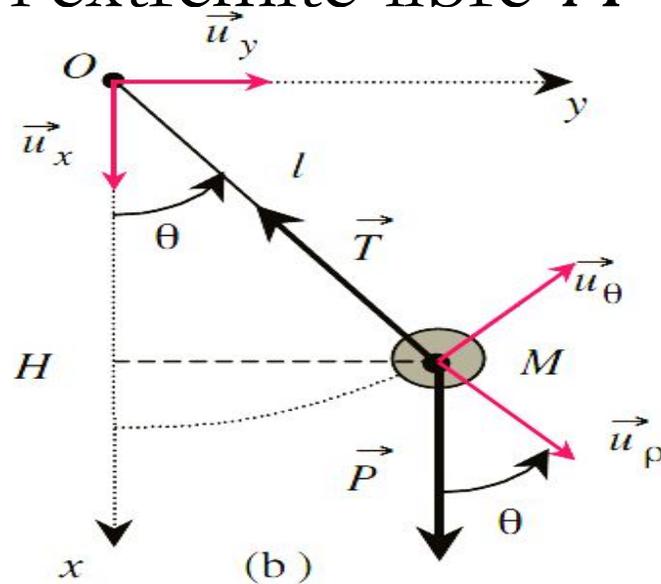
$$\text{et } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

→ Nous démontrerons la deuxième loi de Kepler à partir de la conservation du moment cinétique, en effet la force de gravité est centrale. Par contre, la première loi et la troisième loi dépendent uniquement du fait que la force de gravité est inversement proportionnelle au carré de la distance.

# Cas d'un point matériel p/r à un point fixe (5)

## Exercice d'application

Un pendule simple est constitué d'une masse  $m$  considéré ponctuelle fixe à l'extrémité libre  $M$  d'un fil. La longueur du fil est  $l$ .



Déterminer la position d'équilibre du système par application du théorème du moment cinétique.

# Cas d'un point matériel p/r à un point fixe (6)

## Correction de l'exercice d'application

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{u}_\rho \wedge ml\dot{\theta}\vec{u}_\rho = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$M_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l\vec{u}_\rho \wedge (-T\vec{u}_\rho) = 0$$

$$\begin{aligned} M_O(\vec{P}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{u}_\rho \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_\rho - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) \\ &= -mgl \sin \theta \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = -mgl \sin \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = \sum M_O(\vec{f}_{ext}) = -mgl \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

# Cas d'un point matériel p/r à un axe fixe

Soit  $\Delta$  un axe fixe, on projette simplement le théorème du moment cinétique sur l'axe  $\Delta$  qui contient le point  $O$  :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta = \sum \vec{M}_O(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta \Rightarrow \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta$$

Rappelons que  $L_\Delta$  et  $M_\Delta$  sont indépendants du point  $O$  appartenant à l'axe de projection. Cette forme est très utile dans la description d'un système en rotation autour d'un axe  $\Delta$  et c'est cette dernière, sous sa forme généralisée, que nous allons utiliser pour décrire les solides en rotation.

# Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (1)

Nous allons considérer le solide comme un ensemble de particules (dont les distances sont fixes car le solide est indéformable). Le moment cinétique total de l'ensemble est la somme vectorielle du moment cinétique de chaque particule :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{iO}$$

Le moment total qui agit sur le système est la somme des moments des forces dont l'origine est extérieure au système + la somme des moments des forces dont l'origine est intérieure au système (interactions entre les particules du système) :

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_{iO}^{ext} + \sum_i \vec{M}_{iO}^{int}$$

## Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (2)

Mais on peut montrer, en utilisant la troisième loi de Newton, que :

$$\sum_i \vec{M}_{iO}^{int} = 0$$

Ainsi en dérivant et en appliquant le théorème du moment cinétique pour chaque particule, on obtient :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_{iO}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{iO}^{ext} = \vec{M}_O^{ext}$$

Où  $\vec{M}_O^{ext}$  est le moment total des forces extérieures qui agissent sur le système.

## Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (3)

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  que l'on choisit comme l'axe  $(Oz)$ , on peut projeter la relation précédente sur l'axe de rotation :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{M}_O^{ext} \cdot \vec{u}_\Delta \iff \frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta^{ext} \iff J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta^{ext}$$

Où  $J_\Delta$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$ ,  $M_\Delta^{ext}$  le moment total des forces extérieures projeté sur l'axe  $\Delta$  et  $\omega$  la vitesse de rotation du solide. C'est sous cette forme, dite scalaire, que nous retiendrons le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation :

# Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (4)

Théorème du moment cinétique scalaire: solide en rotation

$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta}^{\text{ext}}$$

Dans le cas où **l'axe de rotation est un axe de symétrie qui passe par le centre de masse du solide**, on a déjà noté que  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ , nous pourrions écrire le théorème du moment cinétique sous forme vectorielle (3 relations scalaires):

$$J_{\Delta} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{\Delta}^{\text{ext}}$$

# Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique total d'un système est constant (il se conserve) si le moment total des forces qui agit sur ce dernier est nul, ce qui s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{0} \text{ si } \sum \vec{M}^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{L}_{tot} = 0 \text{ ou } \vec{L}_{tot,i} = \vec{L}_{tot,f}$$

Cette situation s'applique pour le cas **important des systèmes isolés**. Pour ces derniers, il y a aussi conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$\Delta E_{syst} = 0$  si il n'y a aucun transfert d'énergie à travers la frontière du système.

$\Delta\vec{p}_{tot} = \vec{0}$  si aucune force extérieure n'agit sur le système

$\Delta\vec{L}_{tot} = 0$  si aucun moment extérieur n'agit sur le système

---

# Aspects énergétiques des solides en rotation autour d'un axe fixe

---

# Energie cinétique de rotation (1)

On modélise le solide par un ensemble de points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  repérées en coordonnées cylindriques d'axe  $\Delta$ :  $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$ .

$$J_{\Delta} = \sum_i J_{\Delta}(M_i) = \sum_i m_i R_i^2$$

Un point  $M_i$  quelconque du solide est en mouvement circulaire uniforme de rayon  $R_i$  à la vitesse angulaire commune  $\omega$ . Sa vitesse est donc  $\vec{v}_i = R_i \omega \vec{u}_{\theta_i}$  et son énergie cinétique :

$$E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2$$

# Energie cinétique de rotation (2)

Où on reconnaît l'expression du moment d'inertie du solide :

$$J_{\Delta} = \sum_i m_i R_i^2$$

Un solide de moment d'inertie  $J_{\Delta}$  en rotation autour d'un axe fixe ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

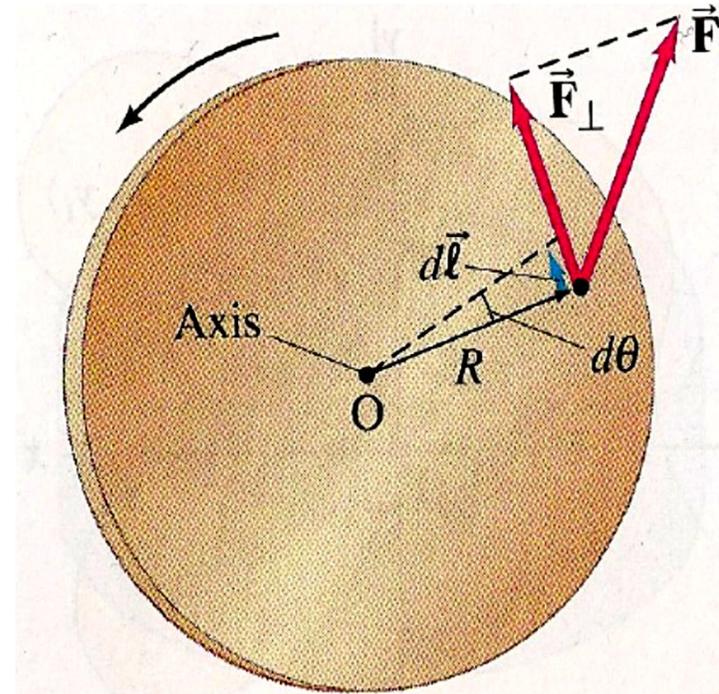
Il y a une forte analogie avec l'expression  $mv^2/2$ , le moment d'inertie joue le rôle de la masse et la vitesse linéaire est remplacée par la vitesse angulaire ! (cf. tableau d'analogie)

# Puissance et travail (1)

On considère le solide de la figure ci-contre en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  qui passe par son centre  $O$ . On souhaite calculer le travail de la force extérieure  $\vec{F}$  qui agit sur un point du solide situé à la distance  $R$  de l'axe de rotation :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{\perp} R d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta} d\theta$$

où  $M_{\Delta} = F_{\perp} R$  est le moment de la force par rapport à l'axe de rotation fixe. On obtient ainsi l'expression du travail d'un moment qui fait tourner le solide de l'angle  $\theta_1$  à l'angle  $\theta_2$



**FIGURE 10-28** Calculating the work done by a torque acting on a rigid object rotating about a fixed axis.

# Puissance et travail (2)

La puissance de la force vaut donc :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M_{\Delta} \frac{d\theta}{dt} = M_{\Delta} \omega$$

On peut aussi retrouver l'équivalent du théorème de l'énergie cinétique pour ce solide en rotation en utilisant le théorème du moment cinétique :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} \right) d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J_{\Delta} \frac{d\theta}{dt} d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J_{\Delta} \omega d\omega$$

$$W = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_1^2$$

# Puissance et travail (3)

On retrouve que **la variation d'énergie cinétique est due au travail des moments des forces extérieures**. On retiendra les résultats suivants :

solide en rotation autour d'un axe fixe

Travail du moment d'une force par rapport à un axe  $\Rightarrow W \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta} d\theta$

Puissance  $\Rightarrow P \equiv M_{\Delta} \omega$

Théorème de l'énergie cinétique  $\Rightarrow W = \underbrace{\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_1^2}_{\Delta E_c}$

# Puissance et travail (4)

**Remarques** : Les principes énergétiques que l'on a rencontrés en mécanique du point sont toujours valables pour les solides indéformables. Cependant seules les forces extérieures interviennent, en effet on peut montrer pour les solides indéformables la nullité du travail et de la puissance des forces intérieures :  $W_{int} = 0$  et  $P_{int} = 0$ . On écrira donc pour les solides indéformables :

$$\text{Solide indéformable} \Rightarrow \begin{cases} \Delta E_c = W_{ext} \text{ ou } dE_c/dt = P_{ext} \\ \Delta E_m = \Delta(E_c + E_m) = W_{ext,nc} \text{ ou } dE_m/dt = P_{ext,nc} \end{cases}$$

---

# Analogie

# Rotation - translation

# Analogie Rotation-Translation (1)

Le tableau ci-dessous fait le parallèle entre le mouvement de translation et le mouvement de rotation pour le point matériel.

Translation	Rotation
Principe fondamental de la dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}$	Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o \text{ ou } \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta$
Quantité de mouvement : $\vec{p}$	Moment cinétique : $\vec{L}_o$ ou $L_\Delta$
Somme des forces : $\vec{F} = \sum \vec{f}$	Somme des moments : $\sum \vec{M}_o$ ou $\sum M_\Delta$
$\vec{p}$ est constant (conservé) si $\sum \vec{f} = \vec{0}$	$\vec{L}_o$ ( $L_\Delta$ ) est constant (conservé) si $\sum \vec{M}_o = \vec{0} \text{ (} \sum M_\Delta = 0 \text{)}$

# Analogie Rotation-Translation (2)

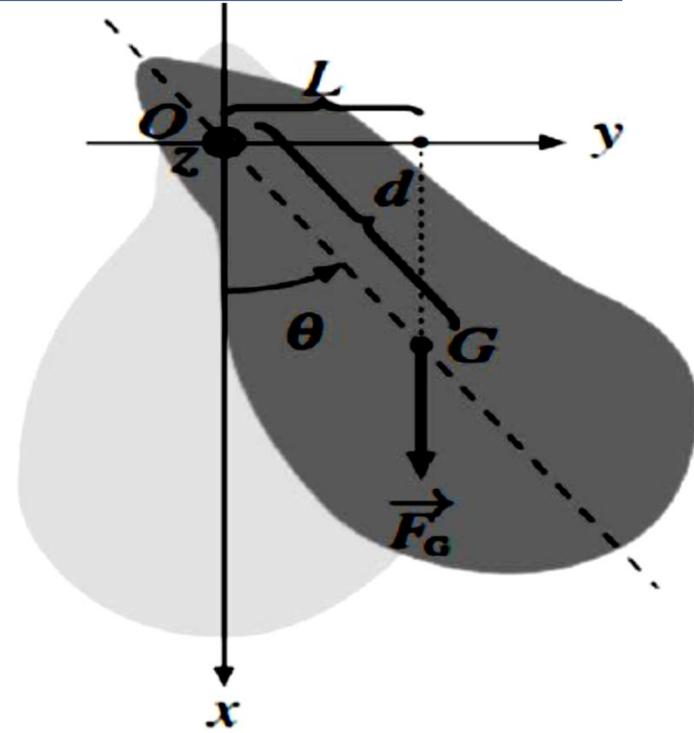
Masse : $m$	Moment d'inertie : $J_{\Delta}$
Energie cinétique = $\frac{1}{2}mv^2$	Energie cinétique = $\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2$
Travail: $W \equiv \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$	Travail: $W \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta} d\theta$
Puissance: $P \equiv \vec{F} \cdot \vec{v}$	Puissance: $P \equiv M_{\Delta} \omega$
Théorème de l'énergie cinétique: $W \equiv \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	Théorème de l'énergie cinétique: $W \equiv \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_1^2$

---

# Application à l'étude du pendule pesant

# Equation du mouvement (1)

Un pendule pesant est un solide de masse  $m$  de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de gravité  $G$ . On note  $(Oz)$  l'axe de rotation du solide,  $G$  son centre de gravité et  $J_{(Oz)}$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$ . On repère la position du solide par l'angle  $\theta$  que fait la droite  $(OG)$  avec la verticale descendante  $(Ox)$ . On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe  $(Oz)$ .



Si l'on écarte ce solide de sa position d'équilibre, il va se mettre à osciller à la manière d'un pendule simple. Cependant, il n'est plus possible de traiter ce solide comme un point matériel, c'est pour cela que l'on parle de **pendule pesant**.

# Equation du mouvement (2)

---

Le solide est soumis à :

- l'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe  $(Oz)$  est nul ;
- son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité  $G$ . Son moment par rapport à  $(Oz)$  est égal en module au produit  $mg \times L$  où  $L = d \sin \theta$  est le bras de levier représenté sur la figure.

Cette force tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre. Le signe de son moment par rapport à  $(Oz)$  est opposé à celui de  $\sin \theta$ . En effet, on voit sur la figure que  $\theta > 0$ ,  $\sin \theta > 0$  et  $\mathcal{M}_{(Oz)} < 0$ .

# Equation du mouvement (3)

Au final :

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = -mgd \sin \theta \Rightarrow \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = -mgd \sin \theta$$

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta} = -mgd \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}} \sin \theta = 0$$

Cette équation est du type  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$  avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}$$

# Oscillations de faible amplitude

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre  $\theta_{eq} = 0$ ,  $\sin \theta \cong \theta$  et l'équation différentielle peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}$$

On reconnaît une équation d'**oscillateur harmonique** dont les solutions sont des sinusoides de pulsation  $\omega_0$  :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\theta_m$  et  $\varphi_0$  sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

# Intégrale première du mouvement (1)

On peut établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation différentielle. Pour cela multiplions là par  $\dot{\theta}$  :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgd \sin \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow J_{(Oz)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) - mgd \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = \text{constante} = E_m}$$

La quantité  $\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = E_m$  est donc **une intégrale première du mouvement homogène à une énergie**. En effet  $J_{(Oz)}$  se mesure en  $kg.m^2$  et  $\dot{\theta}$  est homogène à l'inverse d'un temps donc  $J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$  se mesure en  $kg.m^2.s^{-2} = J$ .

# Intégrale première du mouvement (2)

---

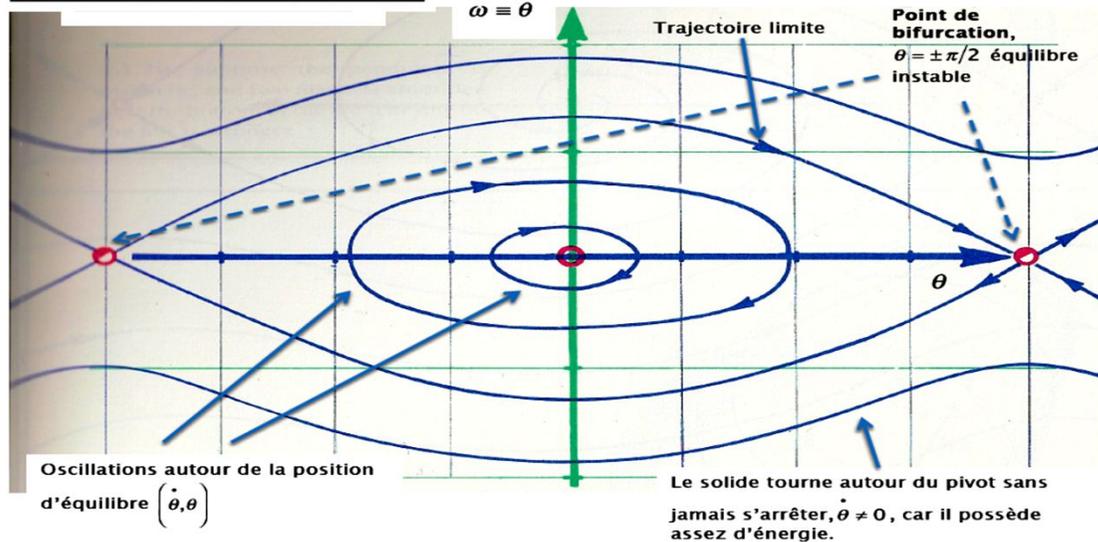
- Le terme  $\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$  correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de l'axe  $(Oz)$ .
- Le terme  $-mgd \cos \theta$  est l'énergie potentielle de pesanteur du solide car  $-d \cos \theta$  est l'altitude du centre de gravité  $G$  comptée à partir de  $O$ .
- $E_m$  est donc l'énergie mécanique du solide. C'est une constante qui dépend des conditions initiales du mouvement.

# Portrait de phase (1)

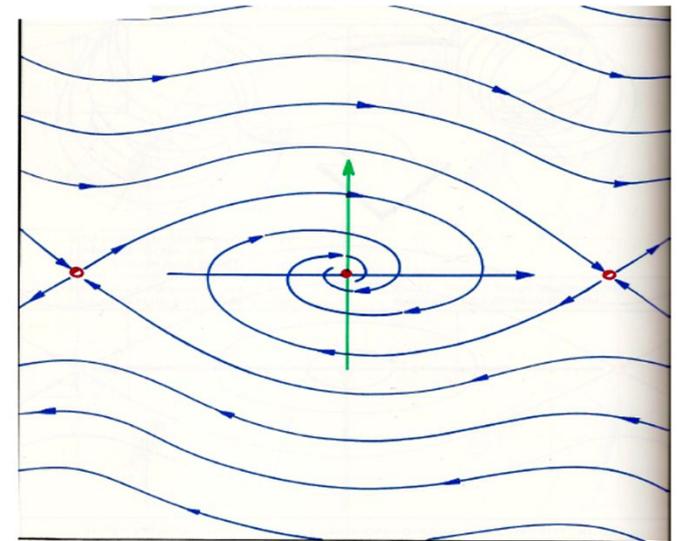
On peut utiliser l'intégrale première du mouvement pour expliciter la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de l'angle  $\theta$  et de l'énergie mécanique  $E_m$ . On trouve :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \pm \sqrt{2 \left( \frac{E_m}{mgd} + \cos \theta \right)}$$

a) Cas sans perte d'énergie



b) Avec perte d'énergie



# Portrait de phase (2)

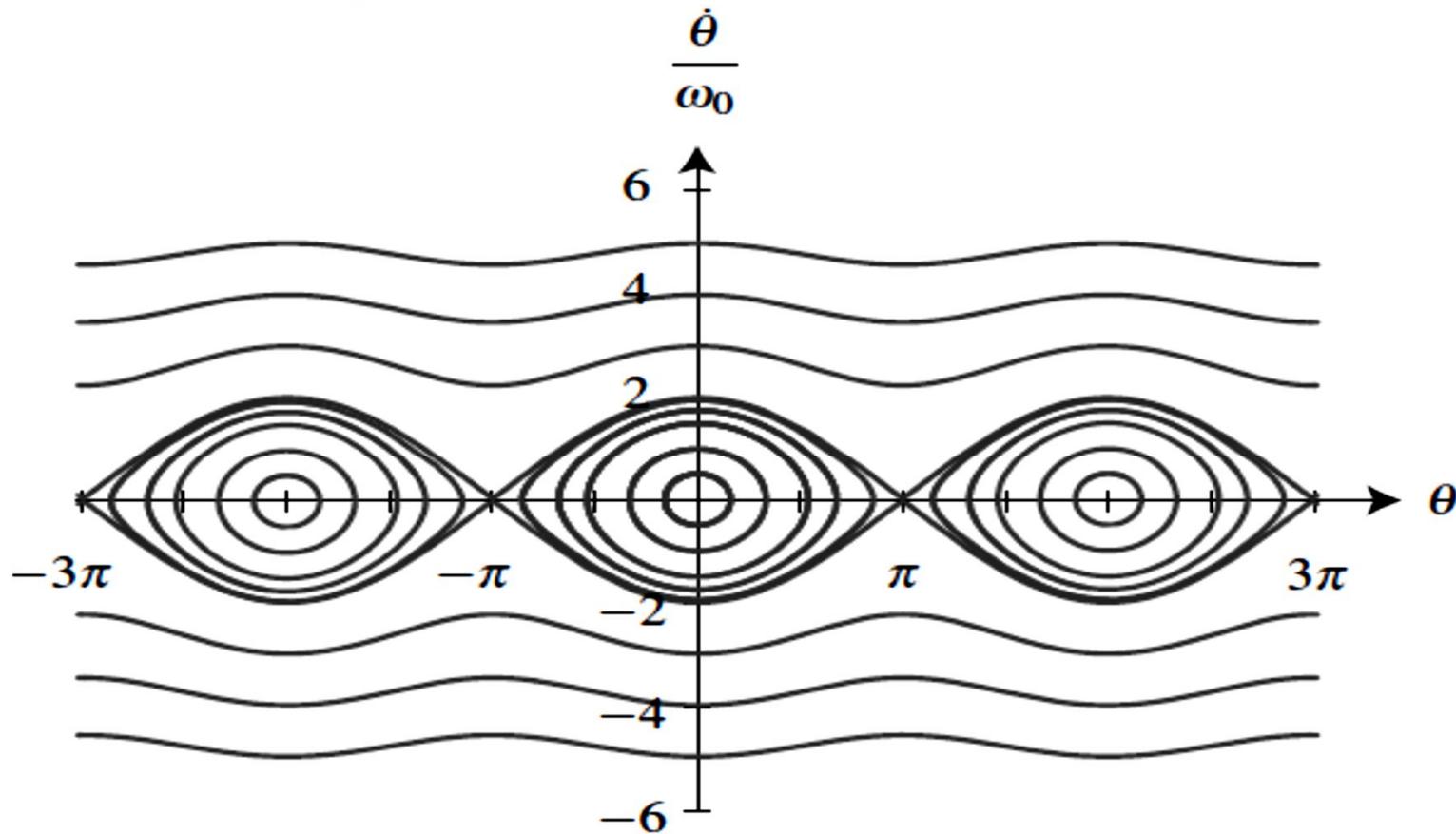


Figure 19.10 – Portrait de phase d'un pendule pesant.